

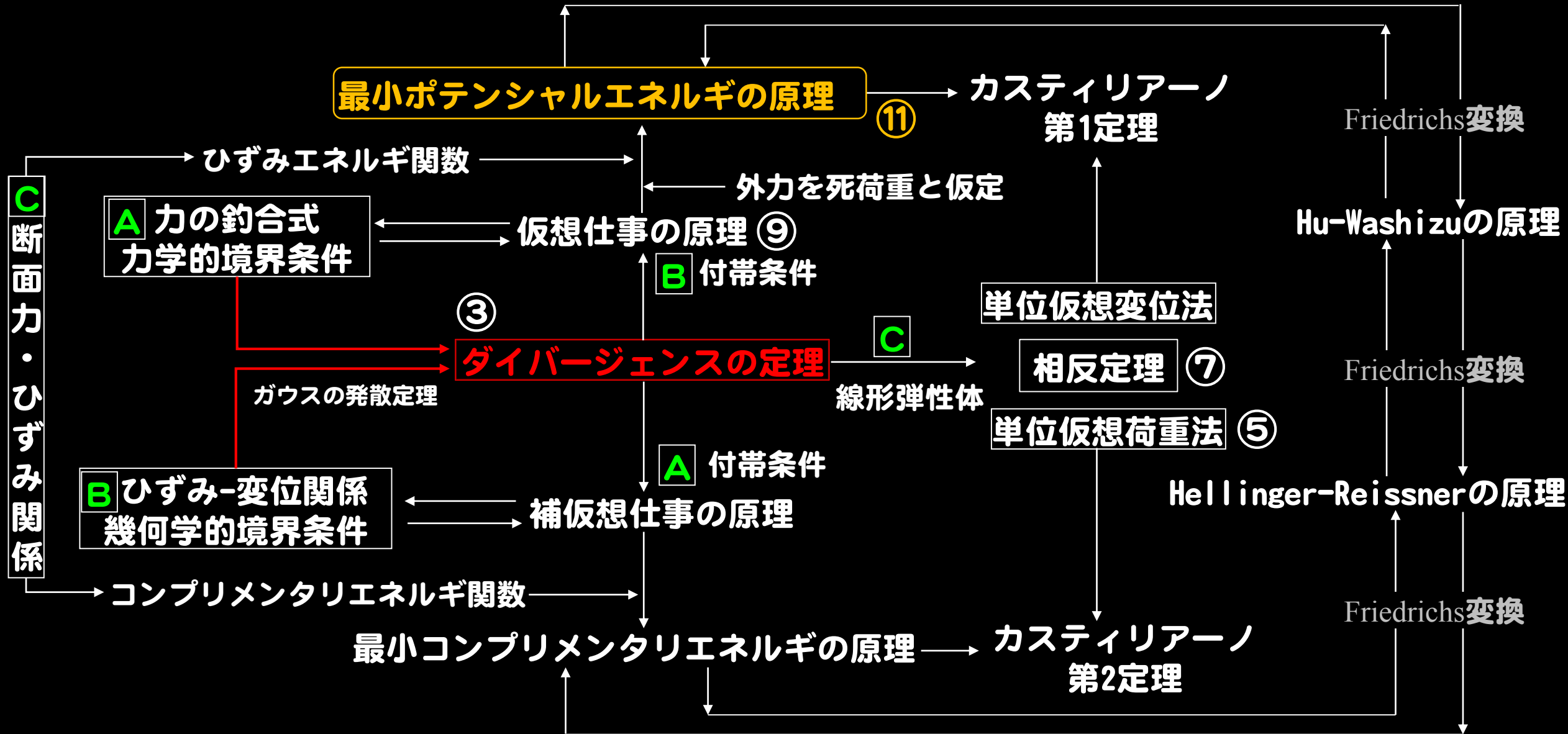
仮想仕事の原理



⑫ 最小ポテンシャルエネルギーの原理 例題

城戸將江・津田恵吾 2021.08

仕事の原理・エネルギー原理の全体像



最小ポテンシャルエネルギーの原理

外力のポテンシャル V

全ポテンシャルエネルギー

$$\Pi = U + V$$

外力

変位

$$\delta \Pi = \delta (U + V) = 0$$

最小ポテンシャル
エネルギーの原理

$$\Pi [v^*(x)] \geq \Pi [v(x)]$$

断面力

ひずみ

$v(x)$: 正解のたわみ

$v^*(x)$: 幾何学的境界条件
を満足する任意のたわみ

ひずみエネルギー U

変分原理

最小ポテンシャルエネルギーの原理

$$\Pi [v^*(x)] \geq \Pi [v(x)]$$

幾何学的境界条件を満足する変位の内、**正解が Π を最小にすることを主張する。**

Π は関数 $v(x)$ の関数 (→汎関数)



Π を最小にする関数 $v(x)$ を求める



第一変分 $\delta\Pi=0$

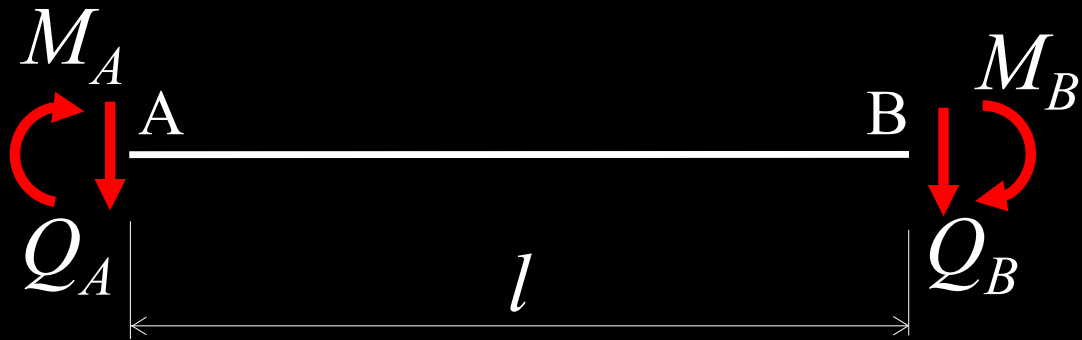
変分法の問題

最小ポテンシャルエネルギーの原理等は、**変分原理**と呼ばれる (変分原理はしばしば**エネルギー原理**と呼ばれる)。

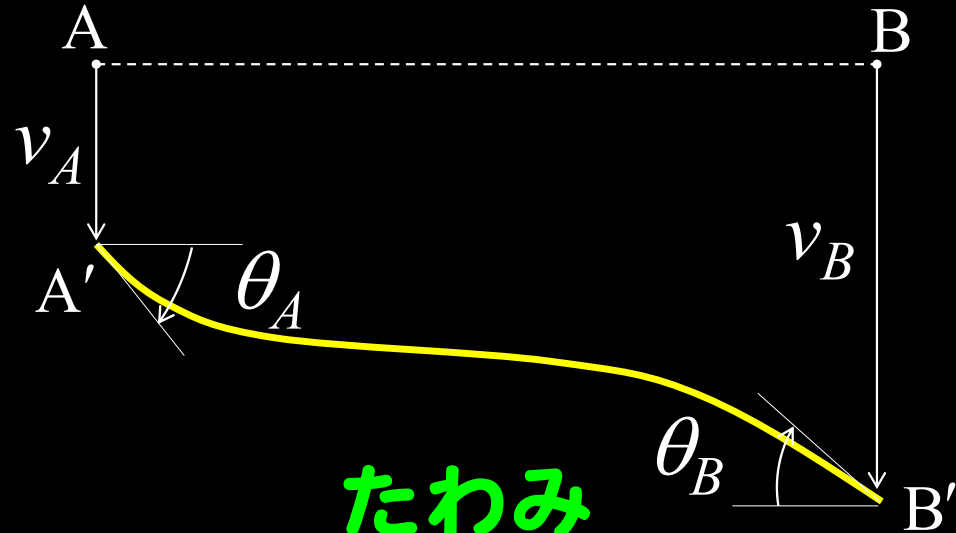
Π の**第一変分 $\delta\Pi=0$** より、変位で表した**釣合い式**、**力学的境界条件**が得られる。

例題1 剛性マトリックス 1

下図の変形状態となる梁のたわみを3次関数で仮定する。



荷重



$$\begin{cases} v(0) = v_A \\ v(l) = v_B \\ v'(0) = \theta_A \\ v'(l) = \theta_B \end{cases}$$

たわみは下式となる。

$$v = \left\{ 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1 \right\} v_A + \left\{ \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{x}{l} \right\} l\theta_A \\ + \left\{ -2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right\} v_B + \left\{ \left(\frac{x}{l}\right)^3 - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right\} l\theta_B$$

例題1 剛性マトリックス 2

全ポテンシャルエネルギー

$$\Pi = U + V = \int_0^l \frac{EI}{2} v''^2 dx - Q_A v_A - M_A \theta_A - Q_B v_B - M_B \theta_B$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} v_A/l & \theta_A & v_B/l & \theta_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_A/l \\ \theta_A \\ v_B/l \\ \theta_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_A/l & \theta_A & v_B/l & \theta_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_A l \\ M_A \\ Q_B l \\ M_B \end{pmatrix}$$

$$\equiv \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{P}$$

2次形式

ここに、

$$\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} v_A/l \\ \theta_A \\ v_B/l \\ \theta_B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} \equiv \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} \equiv \begin{pmatrix} Q_A l \\ M_A \\ Q_B l \\ M_B \end{pmatrix}$$

例題1 剛性マトリックス 3

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{P}$$

最小P.E.の原理より

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{P} = 0$$

材端力と材端変位の関係が得られた

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial (v_A/l)} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_A} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial (v_B/l)} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_B} \end{pmatrix} = \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{P}$$

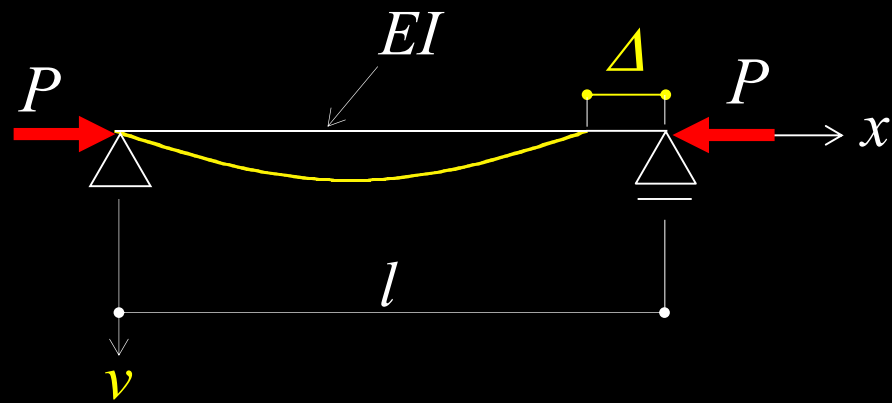
$$\begin{pmatrix} Q_A l \\ M_A \\ Q_B l \\ M_B \end{pmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{pmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_A/l \\ \theta_A \\ v_B/l \\ \theta_B \end{pmatrix}$$

剛性マトリックス

例題2 座屈するときの全ポテンシャルエネルギー

軸力 P のポテンシャルエネルギー = - 荷重 $P \times$ 荷重方向変位

変位 Δ は、材は伸び縮みしないとすると、



軸力を受けて
座屈した時の変位 Δ

$$l = \int_0^{l-\Delta} \sqrt{1+v'^2} dx \doteq \int_0^{l-\Delta} \left(1 + \frac{1}{2} v'^2 \right) dx$$

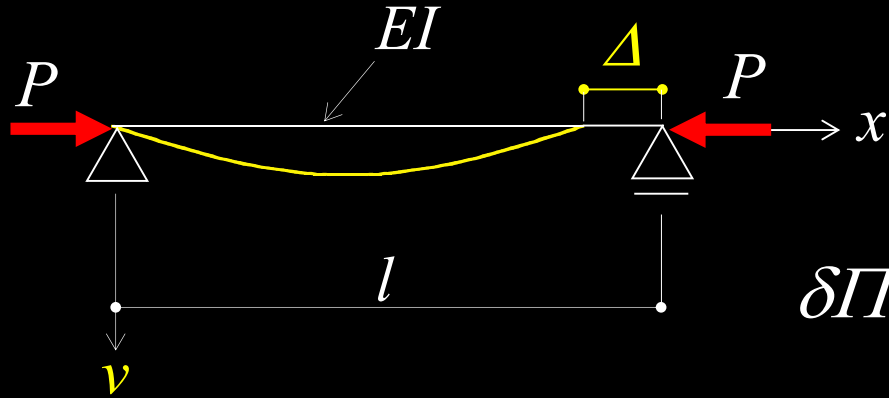
$$= l - \Delta + \int_0^{l-\Delta} \frac{1}{2} v'^2 dx \doteq l - \Delta + \int_0^l \frac{1}{2} v'^2 dx$$

$$\therefore \Delta \equiv \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dx$$

全ポテンシャルエネルギー

$$\Pi[v] = \int_0^l \frac{EIv''^2}{2} dx - \frac{P}{2} \int_0^l v'^2 dx$$

例題3 座屈の問題の基礎方程式 1



$$\Pi[v] = \int_0^l \frac{EIv''^2}{2} dx - \frac{P}{2} \int_0^l v'^2 dx$$

$$\delta\Pi = \int_0^l EIv'' \delta v'' dx - P \int_0^l v' \delta v' dx$$

$$= \left[EIv'' \delta v' - (EIv''' + Pv') \delta v \right]_0^l + \int_0^l (EIv^{IV} + Pv'') \delta v dx$$

$$EIv^{IV} + Pv'' = 0 \quad \text{釣合式}$$

力学的B.C.

幾何学的B.C.

第一変分=0

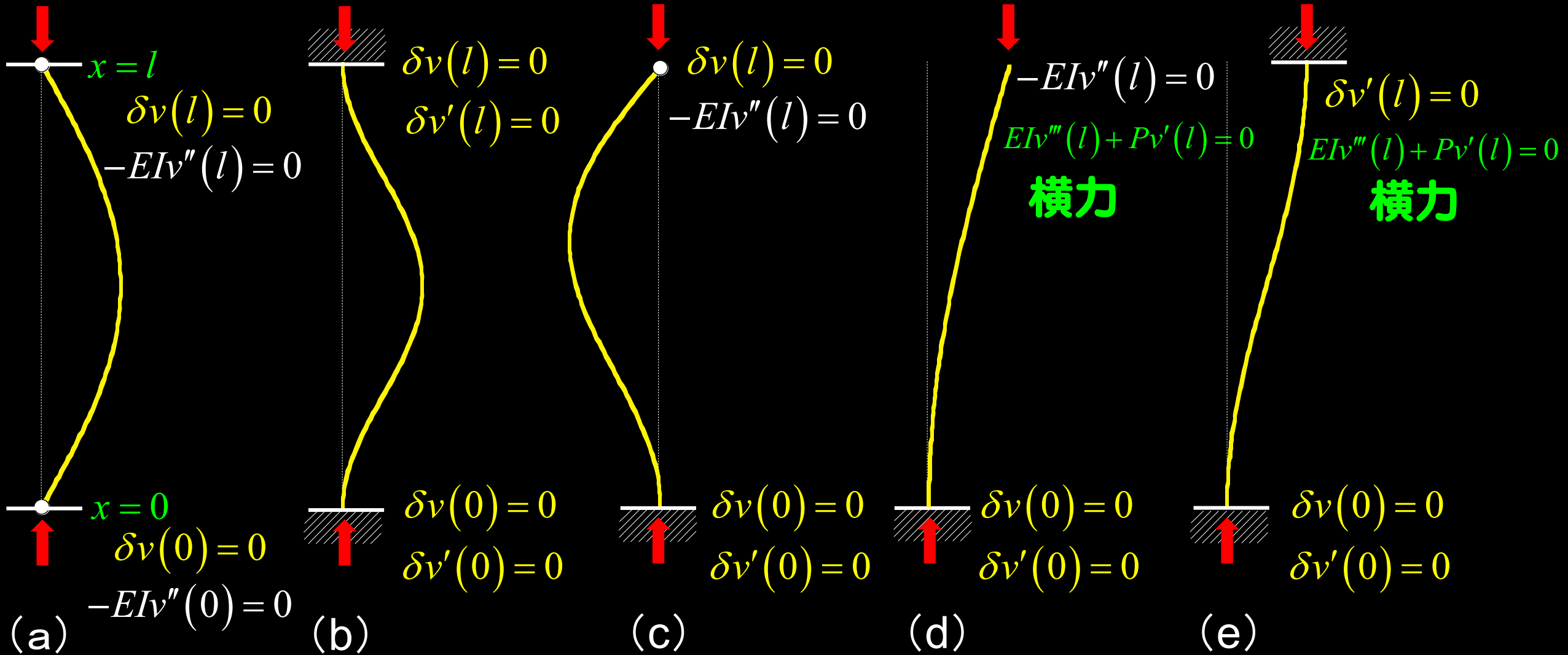
$\delta\Pi = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} EIv''(l) \delta v'(l) = 0 \\ EIv''(0) \delta v'(0) = 0 \\ (EIv'''(l) + Pv'(l)) \delta v(l) = 0 \\ (EIv'''(0) + Pv'(0)) \delta v(0) = 0 \end{cases}$$

\rightarrow

$$\begin{cases} EIv''(l) = 0 & \text{or } \delta v'(l) = 0 \\ EIv''(0) = 0 & \text{or } \delta v'(0) = 0 \\ EIv'''(l) + Pv'(l) = 0 & \text{or } \delta v(l) = 0 \\ EIv'''(0) + Pv'(0) = 0 & \text{or } \delta v(0) = 0 \end{cases}$$

例題3 座屈の問題の基礎方程式 2 境界条件



例題4 座屈荷重の算定 1

釣合微分方程式

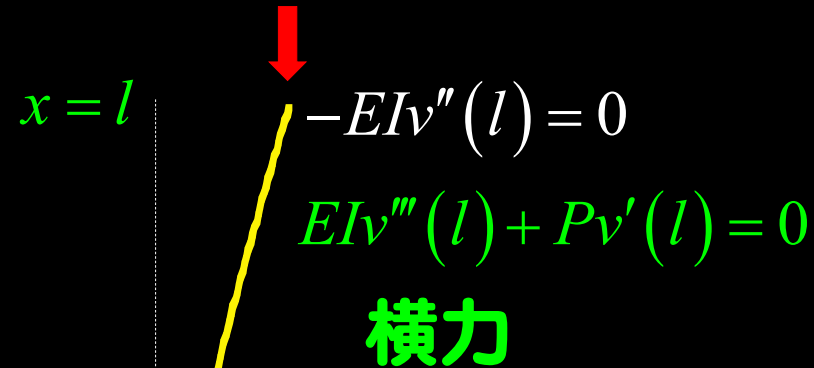
$$EIv^{IV} + Pv'' = 0$$

$$k \equiv \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

一般解

$$v = a \cos kx + b \sin kx + c + dx$$

$$\begin{cases} v' = -ak \sin kx + bk \cos kx + d \\ v'' = -ak^2 \cos kx - bk^2 \sin kx \\ v''' = ak^3 \sin kx - bk^3 \sin kx \\ v''' + k^2 v' = d \end{cases}$$



境界条件

$$\begin{cases} v(0) = 0 & \Rightarrow a + c = 0 \\ v'(0) = 0 & \Rightarrow bk + d = 0 \\ v''(l) = 0 & \Rightarrow -ak^2 \cos kl - bk^2 \sin kl = 0 \\ v'''(l) + k^2 v'(l) = 0 & \Rightarrow d = 0 \end{cases} \quad (b = d = 0, c = -a)$$

(d)

例題4 座屈荷重の算定 2



$$-EIv''(l) = 0$$

$$EIv'''(l) + Pv'(l) = 0$$

横力

$$v(0) = 0$$

$$v'(0) = 0$$

(d)

座屈条件式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 \\ k^2 \cos kl & k^2 \sin kl & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a = b = c = d = 0$ も満足するが、これは**自明の解**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 \\ k^2 \cos kl & k^2 \sin kl & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

例題4 座屈荷重の算定 3

座屈条件式より,

$$\cos kl = 0 \Rightarrow kl = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, \frac{(2i-1)\pi}{2}, \dots$$

$$EIv'''(l) + Pv'(l) = 0 \Rightarrow P = \frac{(2i-1)^2 \pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^2} \quad (i=1, 2, \dots)$$

横力

$$v = a \cos kx + b \sin kx + c + dx \quad (b = d = 0, \quad c = -a)$$

$$v = a \left(\cos \frac{\pi}{2l} x - 1 \right) = a (\cos kx - 1) = a \left(\cos \frac{(2i-1)\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{l} x - 1 \right)$$

重要なのは P を最小とする $i=1$ の場合で, この時

座屈荷重
(固有値)

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

座屈モード
(固有関数)

$$v = a \left(\cos \frac{\pi}{2l} x - 1 \right)$$

$x=l$ $-EIv''(l) = 0$

$EIv'''(l) + Pv'(l) = 0$

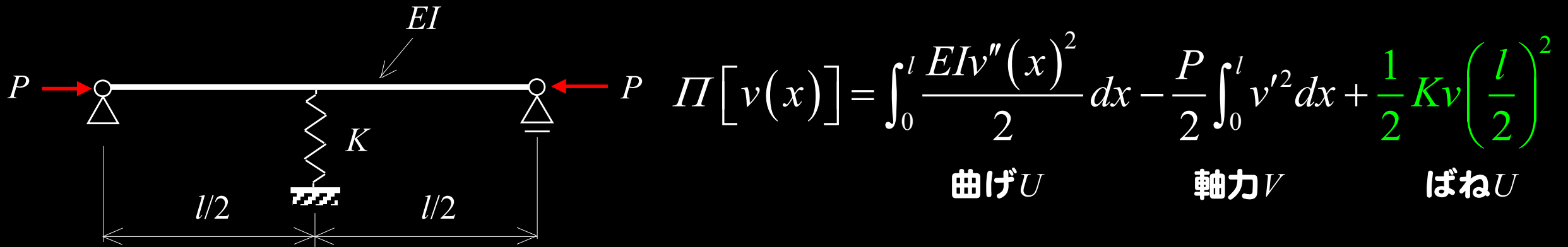
$x=0$ $v(0) = 0$

$v'(0) = 0$

(d)

例題5 ばねの付いた棒の座屈荷重 1

中央にはばね定数が K のばねが取り付いている曲げ剛性が EI の柱に圧縮力 P が作用して座屈する場合を考える。



$$\Pi[v(x)] = \int_0^l \frac{EIv''(x)^2}{2} dx - \frac{P}{2} \int_0^l v'^2 dx + \frac{1}{2} K v \left(\frac{l}{2} \right)^2$$

曲げU
軸力V
ばねU

$$\delta\Pi = \int_0^l EIv'' \delta v'' dx - P \int_0^l v' \delta v' dx + K v \left(\frac{l}{2} \right) \delta v \left(\frac{l}{2} \right)$$

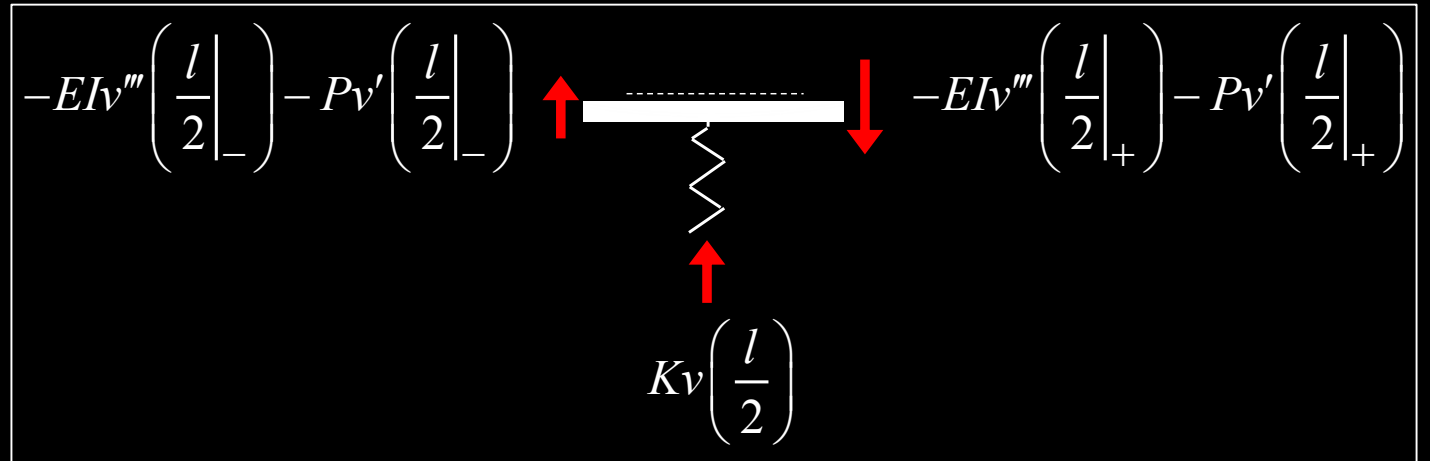
$$= [EIv'' \delta v']_0^l - [(EIv''' + Pv') \delta v]_0^l + \int_0^l (EIv^{IV} + Pv'') \delta v dx + K v \left(\frac{l}{2} \right) \delta v \left(\frac{l}{2} \right)$$

例題5 ばねの付いた棒の座屈荷重 2

$$[EIv'' \delta v']_0^l = [EIv'' \delta v']_0^{\frac{l}{2}-} + [EIv'' \delta v']_{\frac{l}{2}+}^l$$

$$[(EIv''' + Pv') \delta v]_0^l = [(EIv''' + Pv') \delta v]_0^{\frac{l}{2}-} + [(EIv''' + Pv') \delta v]_{\frac{l}{2}+}^l$$

$\frac{l}{2}|_{-}$, $\frac{l}{2}|_{+}$ は, それぞれ, 中央点より十分に小さい左と右の座標である.



$$\begin{cases} EIv^{IV} + Pv'' = 0 \\ EIv''(0) = EIv''(l) = 0 \\ EIv''\left(\frac{l}{2}|_{-}\right) - EIv''\left(\frac{l}{2}|_{+}\right) = 0 \end{cases}$$

中央点での曲げモーメントの連続条件

$$-\left\{ EIv''' \left(\frac{l}{2} \Big|_{-} \right) + Pv' \left(\frac{l}{2} \Big|_{-} \right) \right\} + Kv \left(\frac{l}{2} \right) + \left\{ EIv''' \left(\frac{l}{2} \Big|_{+} \right) + Pv' \left(\frac{l}{2} \Big|_{+} \right) \right\} = 0$$

ばね近傍での横力の釣合式

まとめ

- 1) **最小ポテンシャルエネルギー原理の復習**
- 2) **例題1：梁の剛性マトリックスの算出**
- 3) **例題2：座屈するときの全ポテンシャルエネルギー**
- 4) **例題3：座屈の問題の基礎方程式**
- 5) **例題4：座屈荷重の算定**
- 6) **例題5：ばねの付いた棒の座屈荷重**

次の解説について

仮想仕事の原理，最小ポテンシャルエネルギーの原理に基づいた近似解法を

⑬ 近似解法

で解説します。

質問・要望・意見

よりわかりやすく，役に立つ内容にしたいと考えています。

質問，要望，意見などを，どうぞ宜しくお願い致します。

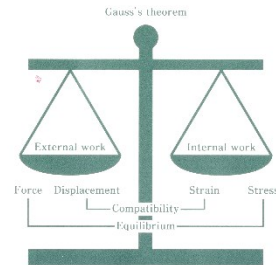
質問等の送付先は，ホームページに示しています。

仮想仕事の原理とエネルギー原理 トラス, 梁, 骨組

鹿島出版会 2019年9月

仮想仕事の 原理と エネルギー原理

トラス, 梁, 骨組



Keigo ISUDA Masae KIDO
津田恵吾 / 城戸将江 (共著)

Virtual work and energy principles
for trusses, beams and frames

鹿島出版会

ISBN978-4-306-03388-7
C3052 ¥3500E

鹿島出版会
定価(本体3,500円+税)

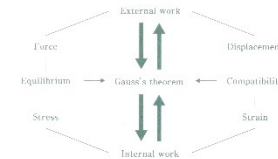


9784306033887



1923052035006

仮想仕事の
原理と
エネルギー原理
トラス, 梁, 骨組



Virtual work and energy principles for trusses, beams and frames